NEMLINEÁRIS KORLÁTOZOTT

SZÉLSŐÉRTÉKSZÁMÍTÁS

A GYAKORLATBAN

műszaki informatika szakos hallgatók számára

Dominich Sándor

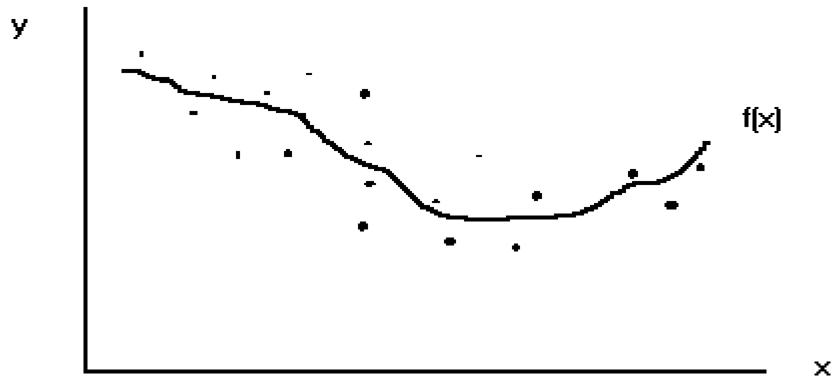
Veszprém, 2005.

I. A LEGJOBB ILLESZTÉS (BEST FIT)

A legkisebb négyzetek módszere

A műszaki mérnöki gyakorlatban használt adatok mindig rendelkeznek bizonyos hibával. Ennek okai sokrétűek: a mérőműszer pontossága (hibája), a mérés pontossága (hibája), a mérési körülmények, stb. Ilyen körülmények között a polinomiális interpoláció — azaz annak a polinomnak a meghatározása, amely pontosan átmegy valamennyi értéken — nem releváns többé. Arról az esetről nem is beszélve, amikor az illető jelenség leírására le lehet vezetni valamilyen összefüggést (ami sok esetben nem polinom).

A fenti okok miatt más megközelítést kell alkalmazni. Ez pedig a következő: egy görbét oly módon 'illeszteni' a mérési adatokhoz, hogy az ezek között és a görbe közötti különbség a lehető legkisebb legyen. (Innen az elnevezés: a legjobb illesztés, vagy "best fit".) Az alábbi ábra szemlélteti azt, hogy különböző x mérési helyeken mért y értékekhez (pontok) egy f(x) görbét illesztünk.



A görbeillesztés elvégzésére a legkisebb négyzetek módszere egy jól bevált eljárás. Legyen x_i, i = 1, 2,..., n mérési helyünk (pl. időpont, távolság, hőmérséklet, stb.), és legyen y_i a megfelelő mért érték. Legyen $f(x,p_1,...,p_m)$ egy — $p_1,..., p_m$ paramétereket is tartalmazó — adott görbe, amelyet illeszteni akarunk az (x_i,y_i) pontpárokhoz. A paraméterek értékeit úgy határozzuk meg, hogy az eltérések (hibák) négyzeteinek összege minimális legyen, azaz az

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i,p_1,...,p_m))^2$$

minimális legyen. Az S akkor minimális, ha a paraméterek szerinti parciális deriváltak nullák, azaz

$$dS /dp_k = 0, \quad k=1,2,...,m$$

A fenti egyenletrendszerből kiszámítjuk a paraméterek értékeit — ezekre lesz minimális az S. Az így kapott paraméter-értékeket behelyettesítjük az f függvénybe — íly módon megkapjuk a legjobban illeszkedő görbét.

A fenti módszert a MathCAD nevű computer algebra szoftver segítségével a következő lépésekben lehet implementálni.

i) Az x_i vektor definiálása a feladatban szereplő értékekkel.
ii) Az y_i vektor definiálása a feladatban szereplő értékekkel.
iii) Az f függvény definiálása (analitikus forma megadása).
iv) Az S függvény definiálása.
v) A dS / dp_k kiszámíttatása a MathCAD-del (Differentiate on Variable).
vi) Az egyenletrendszer képzése (Solve Block: Given) és annak numerikus, azaz Find(..)=, vagy szimbolikus, azaz Find(...) ->, megoldása.

Feladatok

1.

Egy autót a napon parkoltunk le hosszú ideig. A T_a környező hőmérséklet 30°C. Amikor elindulunk az autóval, az utastérben a hőmérséklet lassan hűlni kezd. Az utastérben mért hőmérsékleti értékek a következők: 40°C 5 percnyi haladás után, 35°C 10 percnyi haladás után, és 28°C 15 percnyi haladás után. Az utastér T hőmérséklete a t haladási idő függvényében a következő:

$$T - T_a = DT_0e^{kt}$$

ahol DT_0 a $(T - T_a)$ értéke, amikor az autóval elindulunk, k pedig a lehűlési együttható. Határozzuk meg k és DT_0 paraméterek értékeit !

2.
Jelöljük d90-nel, illetve d120-al egy autónak 90 km/h, illetve 120 km/h sebességről való — méterben mért — megállási távolságait. 6 autó esetében ezek a távolságok a következők:

d90:	128	142	150	162	167	179
d120:	220	250	261	278	294	320

A két távolság közötti összefüggés a következő:

d90 = A x d120 + B

Határozzuk meg az A és B paraméterek értékeit !

3.
Egy szárny-test szerkezet C felszállási együtthatója a következő értékeket veszi fel az ALFA szög függvényében:

ALFA:	0.00	2.50	5.00	7.50	10.00
C:	0.03	0.17	0.31	0.44	0.56

A felszállási együttható és a szög közötti összefüggés a következő:

C = M x ALFA + K

Határozzuk meg az M és K paraméterek értékeit !

4.
Egy nyers olaj V viszkozitására a következő értékeket mérték a T hőmérséklet függvényében:

T:	-12.0	10.0	38.0
V:	50.0	10.0	4.9

A viszkozitás és a hőmérséklet közötti összefüggés a következő:

$$V = K \times T^{P}$$

Határozzuk meg a K és P paraméterek értékeit !

5.

Egy alkatrésznek egy w terhelés alatti meghibásodásához szökséges N számú ciklust a következő összefüggés adja meg:

$$N = K / e^{Cw}$$

Ismerve az alábbi mért értékeket:

w:	100	125	150	175
N:	9238	1724	323	63

határozzuk meg a K és C paraméterek értékeit !

6.

Egy félvezető diódában az I áram változását a V feszültség függvényében a következő összefüggés adja meg:

$$I = I_s e^{kV} - 1$$

ahol I_s az inverz telítettségi áram (amperben), k a dióda karakterisztikája (1/volt-ban). Adottak a következő mérési eredmények:

V:	0.03	0.06	0.09	0.12
I:	0.041	0.133	0.342	0.819

Határozzuk meg az I_s és k paraméterek értékeit !

7.

Egy autó v (m/sec) sebességének 1 sec-onként mért értékei egy motorfék tesztben a következők:

t (sec)	v (m/sec)
1	65.658
2	65.346
3	65.041
4	64.835
5	64.385
6	64.103
7	63.809
8	63.485
9	63.210
10	62.912
11	62.576
12	62.317
13	61.993
14	61.698
15	61.417
16	61.096
17	60.804
18	60.519

A lassulás modellje a következő:

$$- dv / dt = a + bv + cv^2$$

Számítsuk ki dv / dt közelítő értékeit t = 2, 3, ..., 17 sec-okra felhasználva a

$$dv(t) / dt = (v(t+1) - v(t-1)) / 2$$

összefüggést, majd pedig határozzuk meg az a, b és c paraméterek értékeit !

8.

Egy kicsi, felhevített fémtárgy levegőn hűl le. A tárgy T hőmérsékletére a következő mért értékek adódtak:

t(sec):	1	2	5	10	15	20	25	30	
T(°C):	109.58		99.25	73.78	45.15	26.78	17.24	9.85	6.97

Fizikai megfontolások alapján a hőmérséklet exponenciálisan csökken az időben:

$$T = Ae^{-at}$$

Határozzuk meg az A és a paraméterek értékeit !

9.

Egy S lejtésű és R sugarú csatornában áramló Q vízmennyiségre a következő értékeket mérték:

R:	0.5	1.0	1.5	2.0	
S:					
1.5 x 10-3	1.91	3.10	4.11	5.03	
5 x 10-3	3.48	6.66	7.51	9.19	Q
9 x 10-3	4.67	7.59	10.08	12.33	

Elméleti megfontolások alapján a következő összefüggés érvényes:

$$Q = AR^{b}S^{c}$$

Határozzuk meg az A, b és c paraméterek értékeit !

10.

Egy vegyi anyag M transzportrátájára egy porózus felületen a környezet és a felület közötti C koncentrációkülönbség függvényében a következő értékeket mérték:

$C(kg/m^3)$:	0.1	0.3	0.4	0.5	0.7	0.9	1.0
M(kg/s):	2.53	3.33	3.58	3.78	4.12	4.38	4.5

A transzportjelenséget a következő törvényszerűség írja le:

$$M = AC^a$$

Határozzuk meg az A és a paraméterek értékeit !

11.
Egy tartályban a só C koncentrációja a t idő függvényében a következő:

$$C = Be^{-bt}$$

Határozzuk meg a B és b paraméterek értékeit ismerve a következő mérési eredményeket:

t(s):	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	4.0	4.5	5.0
$C(kg/m^3)$:	83.3	81.7	80.0	76.9	69.6	57.0	38.2	34.6	33.0

12.
Telített gőz p nyomása és T hőmérséklete közötti összefüggés a következő:

$$\log p = C + D / T$$

Ismerve az alábbi mért értékeket, határozzuk meg a C és D paraméterek értékeit !

T(°C):	10	20	30	40	50	60	70	80	90
p(kPa):	1.23	2.34	4.25	7.38	12.35	19.94	31.19	47.39	70.10

13.
Egy kicsi rézgömb lehűlési értékeire a következő mérési eredmények adódtak:

t(s):	0.2	0.6	1.0	1.8	2.0	3.0	5.0	6.0	8.0
T(°C):	146.0	129.5	114.8	90.3	85.1	63.0	34.6	25.6	14.1

Elméleti megfontolásokból adódóan a következő összefüggés érvényes:

$$T = Ce^{-ct}$$

Gatározzuk meg a C és c paraméterek értékeit !

14.
Egy kohófal hőmérséklete szinuszosan változik egynapos időperiódussal (a napi ki-bekapcsolás miatt). Ismerve az alábbi mért értékeket:

t(h):	2	3	5	8	10	15	18	22	24
t(°C):	86.5	97.7	104.0	101.7	92.5	62.3	55.0	67.5	80.0

határozzuk meg az A, B és C paraméterek értékeit, ha:

$$T = A \times \sin(6.28 \times t / 24) + B \times \cos(6.28 \times t / 24) + C$$

15.
Adott az

$$y(x) = \sin(3.14ax) + Ae^{b}$$

összefüggés, ahol A, a és b paraméterek. Generáljunk tesztadatokat és vizsgáljuk meg a paraméterek értékeinek meghatározhatóságát !

16.
Ugyanaz, mint a 15. sz. feladat, azzal a különbséggel, hogy az összefüggés az alábbi:

$$y(x) = a + bx^{n}$$

17.

Egy áramkörben az áram csökkenésére a következő mért értékek adódtak:

t(s):	0.5	1.0	1.5	2.5	3.5	5.0	6.5	9.0
I(A):	13.2	10.1	8.7	6.9	6.3	5.1	4.7	4.2

Elméleti megfontolások alapján a következő összefüggés érvényes:

$$I = At^{-a}$$

Határozzuk meg az A és a paraméterek értékeit !

II. Korlátozott szélsőértékszámítás

A műszaki mérnöki gyakorlatban a tervezési feladatok esetében úgy kell megválasztani bizonyos paraméterek értékeit, hogy egy adott célösszefüggés optimálisnak (legnagyobb vagy legkisebb) tekinthető értéket vegyen fel. A célösszefüggés jelenthet pl. költséget, terhelést, szöget, elmozdulást, sebességet, hibát, bevételt, stb.. A paraméterek pedig azok a változók,

i) amelyek a felállított összefüggésekben szerepelnek,

ii) amelyeknek értékeit éppen úgy kell meghatározni (kiszámítani), hogy a célösszefüggés optimális legyen,

iii) amelyek bizonyos megkötéseknek, ún. korlátozásoknak kell eleget tenniük. Ezek a korlátozások eredhetnek fizikai törvényekből, tapaszlati megfontolásokból, vagy jogi előírásokból.

Az ilyen típusú feladatok megoldására nem ismeretes általánosan érvényes módszer, olyan értelemben, mint amilyen pl. a szimplex-módszer a lineáris programozási feladatok esetében. A korlátozott szélsőérték feladatok megoldására több módszert dolgoztak ki, pl. Lagrange-multiplikátorok módszere, Davidon-Fletcher-Powell módszere, SUMT-módszer, stb.. Konkrét gyakorlati feladatok megoldása esetében nincs általános recept arra nézve, hogy melyik módszer alkalmazható sikeresebben.

A SUMT-módszer (Sequential Unconstrained Minimisation Technique) és annak MathCAD segítségével történő implementálását az alábbiakban adjuk meg.

A nemlineáris programozási feladat szokásos általános matematikai megfogalmazása a következő:

célfüggvény: $\min\limits_{x} f(x)$ $x = [\, x_1, x_2, \ldots, x_n \,]^T$,

korlátozó feltételek:

$h_i(x) = 0 \qquad i=1,\ldots,m$

$g_i(x) >= 0 \qquad i=m+1,\ldots,p$

A célfüggvény vizsgálatát a korlátozó összefüggések által megszabott keretek között kell végezni. Innen származik az a törekvés, hogy a korlátozásokat "beágyazzuk" valamilyen módon a célfüggvénybe. E "beágyazás" egyik módja a célfüggvénynek a korlátozások által történő ún. büntetése. Ez azt jelenti, hogy a célfüggvényhez hozzáadjuk a korlátozásokból képezett valamilyen új függvényeknek általában súlyozott alakját. Az így képezett függvény neve büntetőfüggvény. Az eredeti nemlineáris programozási feladat ekkor egyenértékű a büntetőfüggvény -- immár korlátozások nélküli -- minimumának kiszámításával. Nem ismeretes olyan általánosan érvényes szabály a büntetőfüggvény képzésére, amely lehetővé tenné tetszőleges nemlineáris programozási feladat megoldását. A SUMT-módszer általában a következő büntetőfüggvények valamelyikét ajánlja:

$$P(x,r_k) = f(x) + r_k^{-1} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x) - r_k \sum_{i=m+1}^{p} \ln (g_i(x))$$

$$P(x,r_k) = f(x) + r_k^{-2} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x) + r_k \sum_{i=m+1}^{p} g_i^{-1}(x)$$

$$P(x,r_k) = f(x) + r_k \sum_{i=1}^{p} [\, h_i^2(x) + g_i^2(x) \,]$$

Kimutatható, hogy bizonyos feltételek (pl. f(x) konvex) mellett igaz, hogy:

$$\min_x f(x) = \lim_{r_k \to V} \min_x P(x, r_k)$$

ahol V=+∞ a harmadik büntetőfüggvény esetében, és V=0 az első kettő esetében. A min $P(x, r_k)$ meghatározása a

$$\delta P(x, r_k) / \delta x_j = 0, \quad j=1, 2, ..., n$$

egyenletrendszer megoldása révén lehetséges. Valóságos (azaz nem tanpélda jellegű) feladatok megoldása során azonban általában a következő -- igen komoly – számítási nehézségek merülnek fel:

a) A $\delta P(x, r_k) / \delta x_j$ parciális derivált kiszámítása.

b) A $\delta P(x, r_k) / \delta x_j = 0, \quad j=1, 2, ..., n$ egyenletrendszer megoldása.

c) A $\underset{x}{\lim} \quad \underset{r_k \text{->} V}{\min} \quad P(x, r_k)$ határérték kiszámítása.

A fentiek miatt valóságos feladatok megoldására a következő módszer ajánlott:

i) Meghatározni x-nek egy $x^{(0)}$ kezdeti értékét. Ezt -- gyorsabb konvergencia esélye miatt -- ajánlatos belső pontként megválasztani, azaz olyan pontként, ami kielégíti a korlátozó feltételeket.

ii) Meghatározni r-nek egy r_0 kezdeti értékét.

iii) Az $x^{(1)}$ meghatározása min $P(x, r_0)$ kiszámítása révén.

iv) Meghatározni r_1-et.

v) Az $x^{(2)}$ meghatározása min $P(x, r_1)$ kiszámítása révén.

vi) Ismételni az iii)-v) pontokat.

A konvergencia sebessége függ az r_k sorozat kezdeti értékétől és csökkenésének (növekedésének) mértékétől. Ajánlatos az $x^{(2)}$ kiszámításánál az $x^{(1)}$-et használni kiinduló pontként. A min $P(x, r_k)$ kiszámítására több algoritmus ismeretes (pl. Davidon, Fletcher, stb.)

A MathCAD szoftver lényeges -- számítási, szerkesztési, stb. -- segítséget jelent a SUMT-módszer implementálásában. Nevezetesen:

1) A célfüggvény beadása.

2) A korlátozásokból képezett egyenlőtlenségrendszer megoldatása MathCAD-del belső pont meghatározása végett.

3) A büntető függvény képzése a MathCAD matematikai szerkesztési lehetőségeit felhasználva.

4) A büntető függvény parciális deriváltjainak kiszámíttatása MathCAD-del.

5) A parciális deriváltakból álló egyenletrendszer definiálása a MathCAD Solve Block segít-ségével.

6) Az egyenletrendszer iteratív megoldatása r_k csökkenő (növekvő) értékeire a MathCAD F(r) = Minerr(..) vagy F(r) = Find(..) ismételt megoldási függvény felhasználásával általában addig, amíg a kapott eredmény stabilizálódik.

7) Az f(x) Hesse-féle mátrixának képzése a MathCAD deriválási operátorával.

8) A Hesse-féle mátrix értékének kiszámíttatása MathCAD-del, előjel megállapítása, f(x) konvex (min) vagy konkáv (max) voltának megállapítása.

A MathCAD-ben végzett konkrét számítások során, általában, a következőkre ajánlatos tekintettel lenni:

- Nem mindig kapunk globális minimumot, hanem csak egy lokálisat. Előfordul, hogy nem kapunk megoldást, bár az létezik.

- Több belső ponttal próbálkozzunk.

- Növeljük a számítási pontosságot (a számítási hibák terjedése nagy).

- Az egyenletrendszer iteratív megoldásával többször kell próbálkozni.

Gyakorlatok

1.

opt: $(x-3)^2 + (y-2)^2$

kor: $x + y <= 4$

2.

opt: $(x-3)^2 + (y-2)^2$

kor: $x + y >= 8$

3.

opt: $(x-3)^2 + (y-2)^2$

kor: $x - y = 0$

$x + y - 8 >= 0$

4.

opt: $(x-3)^2 + (y-2)^2$

kor: $x - 2*y = 0$

$x^2*y - 62.5 >= 0$

5.

opt: $5.42x_1x_2+0.258x_3x_4(36+x_2)$

kor: $x_4-x_1 >= 0$

$$1800 - 587520 / ((x_3)^2 x_4) >= 0$$

$$687 x_3 (x_4)^2 (1 - x_3/91) - 2720 >= 0$$

$$1000 - ((97920+1360 x_2)\sqrt{(x_2)^2+(x_3)^2}) / (0.707 x_1 x_2 ((x_2)^2/3 + (x_3)^2) >= 0$$

III. Korlátozott szélsőérték feladatokhoz vezető tervezési esetek

1. Egy egyetem felvételi stratégiája

Egy egyetem beirat x belföldi hallgatót, akik rögzített díjat fizetnek, és y külföldi hallgatót, akiknek díját az egyetem saját hatáskörben állapíthatja meg -- jelöljük ezt a díjat pl. z-vel. A kormány -- nemzeti érdekekre hivatkozva -- megszabja azt, hogy az egyetemen rendelkezésre álló összes N helyből H helyet belföldi hallgatók foglaljanak el. Amennyiben az egyetem ettől eltér, akkor $P=k(x+H)^2$ büntetést kell fizetnie. Feltételezne, hogy van elegendő számú hallgató ahhoz, hogy valamennyi helyet elfoglalja, továbbá azt, hogy a külföldi hallgatók száma és az általuk fizetett díj között egy y=r(z) összefüggés áll fenn, az egyetemnek az a célja, hogy maximalizálja a külföldről származó Q nettó bevételt.

Állapítsuk meg a célösszefüggést ! Mivel a cél a nettó bevétel maximalizálása, a célösszefüggés a nettó bevételt megadó összefüggés lesz. A nettó bevételt pedig úgy kapjuk meg, hogy megszorozzuk a külföldi hallgatók számát (y) az általuk fizetett díjjal (z) és ebből kivonjuk a büntetést (P), azaz a nettó bevétel:

$$Q = yz - P$$

Vagy (behelyettesítve P-t):

$$\mathbf{Q = yz - k\,(\,x - H\,)^2}$$

Ez tehát a célösszefüggés. Van azonban néhány megkötés.

Az egyik az, hogy a belföldi hallgatók száma (x) plusz a külföldi hallgatók száma (y) egyenlő az összhelyek számával (N). Tehát

$$x + y = N$$

A másik pedig az a kapcsolat, ami a felvett külföldi hallgatók száma (y) és a számukra megállapított díj (z) között van. Tegyük fel, hogy az egyetem - tapasztalati úton - arra a megállapításra jut, hogy ez a kapcsolat a következő:

$$y = 250 - z / 20$$

Összefoglalva:

Úgy kell meghatározni az x, y és z tervezési paraméterek értékeit, hogy a

$$yz - k (x - H)^2$$

célösszefüggés maximális legyen, de ugyanakkor figyelembe kell venni az

$$x + y = N$$

$$y = 250 - z / 20$$

feltételeket (korlátozásokat, megkötéseket, megszorításokat).

Rövidebb írásmódban:

$$\max \; -> \; (\mathbf{yz - k (x - H)^2})$$

korlátozások:

$$\mathbf{x + y = N}$$

$$\mathbf{y = 250 - z / 20}$$

2. Csúszda tervezése

A feladat olyan vízicsúszda tervezése, amelyről a lesikló személy vízszintesen repül a víz felszínére.

A csúszda tetejének koordinátái (0, h), alsó végének pedig (L, 0). A személy a csúszda tetejére egy bizonyos kezdősebességgel -- pl. 1.5 m/s -- érkezik (lendületet vesz), vízszintesen, és a csúszda alját egy bizonyos végsebességgel hagyja el, ugyancsak vízszintesen. A csúszda alakját leíró y(x) függvénynek ezért ki kell elégítenie a következő feltételeket:

$$y(0)=h, \; y(L)=0, \; y'(0)=y'(L)=0$$

ahol y' az y elsőrendű deriváltja.

A csúszda alakját közelítő görbe legyen a következő:

$$y / h = a\xi^4 + b\xi^3 + c\xi^2 + 1, \qquad \text{ahol} \quad \xi = x / L$$

A csúszda teteje konkáv, ezért y'' negatív, alja pedig konvex, tehát y'' pozitív. Közben, valahol az L távolságon, van egy inflexiós pont. Válasszuk meg ennek helyét egy λ paraméter segítségével a következőképpen:

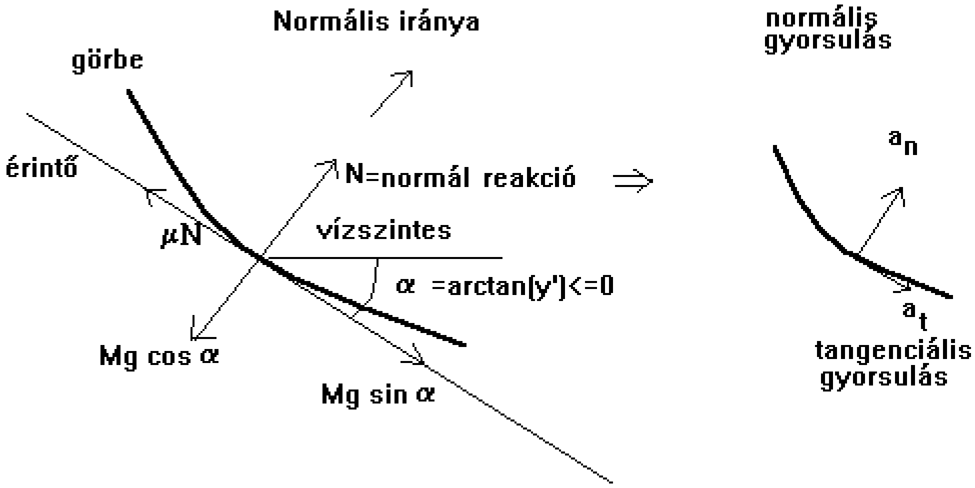
$$y''(x) = 0, \qquad \text{ha } x = \lambda L \quad (\text{azaz } \xi = \lambda)$$

Ésszerűnek tűnik az inflexiós pont helyét valahol a csúszda L hosszának második harmadában megválasztani, azaz:

$$1 / 3 < \lambda < 2 / 3$$

A csúszda h magassága legyen adott, pl. h=5 m. Ekkor meghatározandó ismeretlenek a csúszda L hossza és az inflexiós pont helyét meghatározó λ paraméter.

A csúszdán lesikló M tömegű testre ható erők a következők: i) A normális erők merőlegesek a csúszdára, és két komponensük van: az egyik - a test tömegkomponense - merőleges a csúszdára; ii) a másik pedig a csúszda visszaható ereje a testre. A tangenciális erők a csúszdára érintőlegesen ható erők, és a test egy tömegkomponenséből, valamint a súrlódási erőből tevődnek össze. Lásd az alábbi ábrát.



A súly komponensek a normális komponens (Mg cos α) és a tangenciális komponens (Mg sin α), ahol α **=** arctan(y') negatív szög.

A csúszda által a testre ható normális erő N, a tangenciális súrlódási erő μN, ahol μ = 0.1 dinamikus súrlódási együttható.

Newton második törvényét alkalmazva megkapjuk a mozgás normál egyenletét:

$$N - Mg \cos \alpha = Ma_n$$

Végigosztva Mg-vel kapjuk, hogy:

$$N / (Mg) = \cos \alpha + a_n / g$$

Legyen v a csúszdázó sebessége, ρ pedig a csúszda görbületi sugara, azaz

$$\rho = [\, 1 + (y')^2 \,]^{1.5} / y''$$

Akkor a normális gyorsulás a következő:

$$a_n = v^2 / \rho$$

Mivel a csúszdának simának kell lennie, a súrlódás gyakorlatilag nullának tekinthető. Ekkor az energiamegmaradás elve alapján írhatjuk, hogy:

$$v^2 = (v_0)^2 + 2g(h-y), g = 9.81\ m / s^2, \qquad \mu = 0$$

Az N / Mg arányt elég kicsinek kell megválsztani, pl. legyen kisebb, mint 1.5:

$$N / Mg = \cos\alpha + [(v_0)^2 + 2g(h-y)] / [\rho\ g] <= 1.5$$

A mozgás tangenciális egyenlete a következő:

$$a_t = d[v^2 / 2] / ds = g \sin\alpha \quad - \quad \mu N / M$$

ahol s a csúszda ívhossza, és

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

A csúszdázó mozgásgyenlete és a kezedeti feltétel a következők:

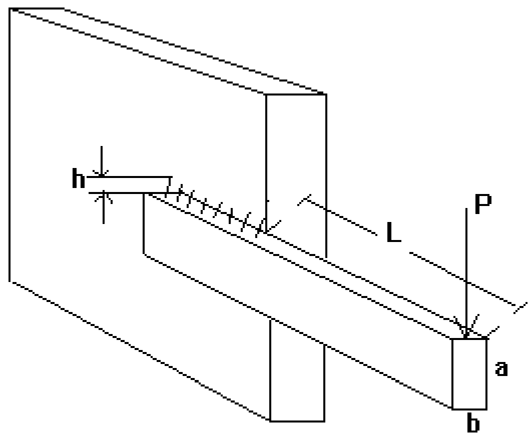
$$d(v^2) / dx = 2 [g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha) - \mu v^2 / \rho] \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$v^2 = (v_0)^2, \text{ ha } x = 0$$

A cél olyan csúszda tervezése, amelyet maximális v_e végsebességgel hagy el a csúszdázó. A csúszdázó akkor éri el a csúszda végét, ha a fenti egyenlet megoldása nem negatív egyetlen x-re sem 0 és L között.

3. Hegesztett tartó költsége

A hegesztett tartó az alábbi ábra szeinti:



ahol adottak a következők:

P: terhelés

L: hosszúság

l: a fennmaradó rúdhossz (rúd teljes hossza - L), x2

a,b: magasság, ill. szélesség; x3, ill. X4

h: a varrat szélessége (x1)

A hegesztés költségfüggvénye a következő:

$$(k1 + k2)(x1)^2 x2 + k3x3x4(L+x2)$$

ahol

k1: a hegesztés fajlagos költsége

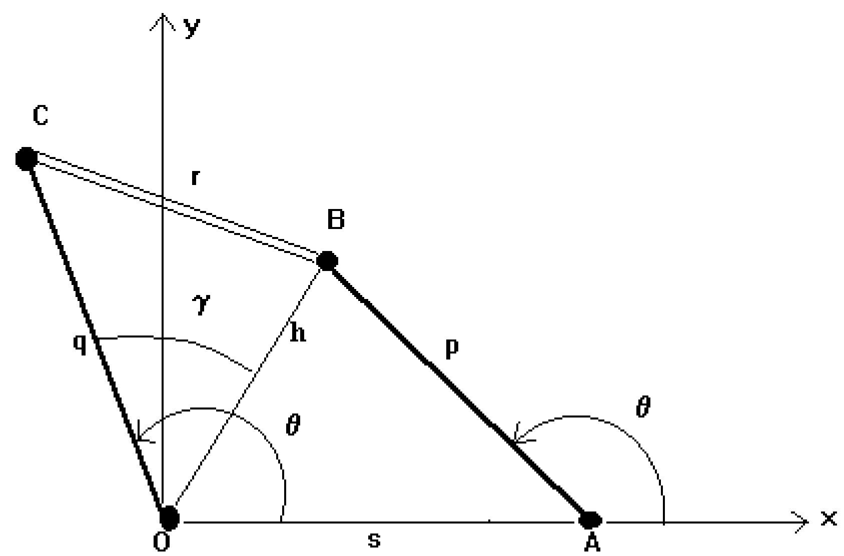
k2: a hegesztő anyag fajlagos költsége

k3: aródanyag fajlagos költsége

A korlátozó függvényeket a következő megfontolások alapján kell felírni.
- A hegesztés összetett feszültsége nem haladhat meg egy adott értéket.
- A rúd hajlító feszültsége nem léphet túl egy megadott értéket.
- A varrat szélessége nem lehet nagyobb a rúd vastagságánál.
- Figyelembe kell venni a kritikus tehelést.
- Bizonyos méretnél vékonyabb varratot nem célszerű késziteni.
- A lehajlás korlátozott.

4. Négykarú kapcsolószerkezet tervezése

A szerkezet egy p hosszúságú AB bemeneti karból, és egy r hosszúságú OC kimeneti karból áll. Az s hosszóságú OA kar tulajdonképpen nem létezik; tulajdonképpen az O és A megtámasztási pontok rögzítő talapzata.



Ilyen szerkezeteket körforgásnak rezgőmozgássá való átalakításához lehet alkalmazni.

Az O megtámasztási pont az xOy koordinátarendszer origója. A θ bemeneti és ϕ kimeneti szögeket az óramutató járásával ellentétes irányba mérjük az Ox tengelytől kiindulva. A kimeneti szögre érvényes az alábbi összefüggés:

$$0 <= \phi min < \phi max <= \pi \text{ (radian)}$$

A ϕmax annak az esetnek felel meg, amikor AB és BC egy egyenesben vannak, ϕmin pedig annak, amikor AB és BC egybeesnek. A B pontnak x_B és y_B koordinátái polárkoordinátákban kifejeve -- a következők:

$$x_B = p * \cos(\theta) + s \qquad y_B = p * \sin(\theta)$$

Az OBC háromszögből kapjuk, hogy:

$$\phi = \gamma + \arctan(y_B / x_B)$$

ahol γ -t kiszámíthatjuk a koszinusztétel segítségével:

$$\gamma = \arccos(q^2 + h^2 - r^2) / (2*q*h)$$

Tehát írhatjuk, hogy:

$$\phi = \arccos(q^2 + h^2 - r^2) / (2*q*h) + \arctan((p * \sin(\theta)) / (p * \cos(\theta) + s))$$

Hogyan válasszuk meg p, q és r értékeit ahhoz, hogy ϕ változása szinuszos legyen θ függvényében ?

A szinuszos viselkedés felírásához a következőképpen járunk el. Legyen ϕ_i a

$$\theta_i = i*(\pi/12), \qquad i = 0, 1, ..., 23$$

bemeneti szögértéknek megfelelő kimeneti szögérték. ϕ szinuszos viselkedését a következőképpen fejezzük ki:

$$\phi sin = (\phi max + \phi min) / 2 + ((\phi max - \phi min) / 2) * \sin(\theta - ß)$$

ahol ß fázisszög értékét úgy kell meghatározni, hogy az

$$d = (1 / 24) * \sum_{i=0;23} (\phi_i - [\phi sin]_i)^2$$

minimális legyen. Ez a célfüggvény. A korlátozások pedig a következők:

$0 <= \phi min < \phi max <= \pi$ (radian)

0.95 radian <= (ϕmax - ϕmin) / 2 <= 1.00 radian

$0.2 < p < 1$

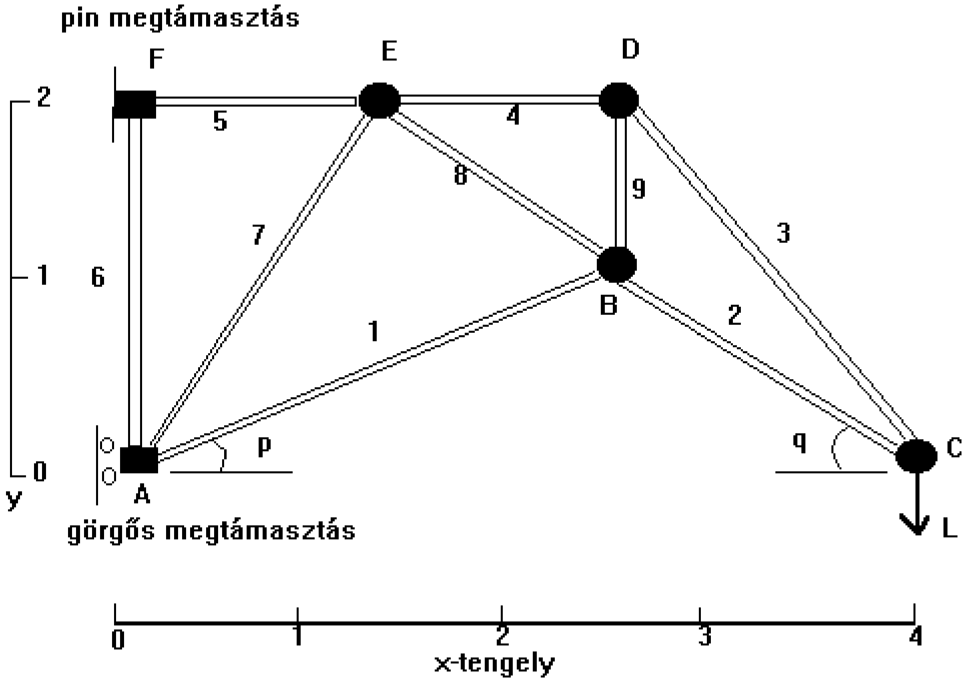
$p < q < 2$

$0.2 < r < 2$

$-1 <= (q^2 + h^2 - r^2) / (2*q*h) <= +1$

5. Sík rácsos tartó tervezése

A tartó hat csatlakozási pontból (csukló) és kilenc elemből (kar) áll, ahogyan az alábbi ábrán látható:



A csuklók: A, B, C, D, E és F. A karok 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 és 9. A csuklók koordinátái a következők (kivéve B-t):

A: (0,0)   C: (4,0)   D: (2,2)   E: (1,2)   F: (0,2)

A külső L megterhelés a C csuklón hat, lefelé, azaz y negatív irányába. A tartó pin felfüggesztésű az F-ben, ahol kétkomponensű külső terhelés van. Az felfüggesztés A-ban görgős; a külső terhelés itt egykomponensű.

A B csukló helyzetének olyannak kell lennie, hogy az 1-es és 2-es elemek legyőzzenek egy akadályoztatást (ne "ragadjanak be"). Ennek az afeltátele, hogy a p és q szögekre teljesüljenek az alábbi feltételek:

$p >= 16°$ $q >= 21°$

Ezen kívül a B-nek abban a tartományban kell maradnia, amelyet a 3-as, 4-es és 7-es elemek határoznak meg, és nem kerülhet 0.5 inch-nél (1 inch = 25.4 mm) közelebb ezen elemek közepéhez.

Tervezési feladat: a tartó súlyára eső terhelés maximalizálása.

Legyen Lmax az a maximális terhelés, amit a tartó még elbír, és W a tartó súlya. Akkor a tervezési feladat a következő F függvény maximalizálásaként fejezhető ki:

$$F = Lmax / W$$

A tartót d inch átmérőjű és ß sűrűségű rudakból kell megépíteni. Legyen r_m az m-edik elem hossza. Akkor a tartó W súlya a következő:

$$W = ß * \sum_{m=1;9} PI * (d/2)^2 * r_m$$

Lmax kiszámításához a következőképpen járunk el. Számítsuk ki az m-edik elemre ható f_m terhelés nagyságát L=1 lb (1 lb = 1 font =) esetében. Az egy elemre eső biztonságos Q_m terhelés az f_m függvényében ekkor a következő:

$$Qm = \begin{cases} f_m / 250, & f_m >= 0 \\ - (f_m / 450) * r_m^2, & f_m < 0 \end{cases}$$

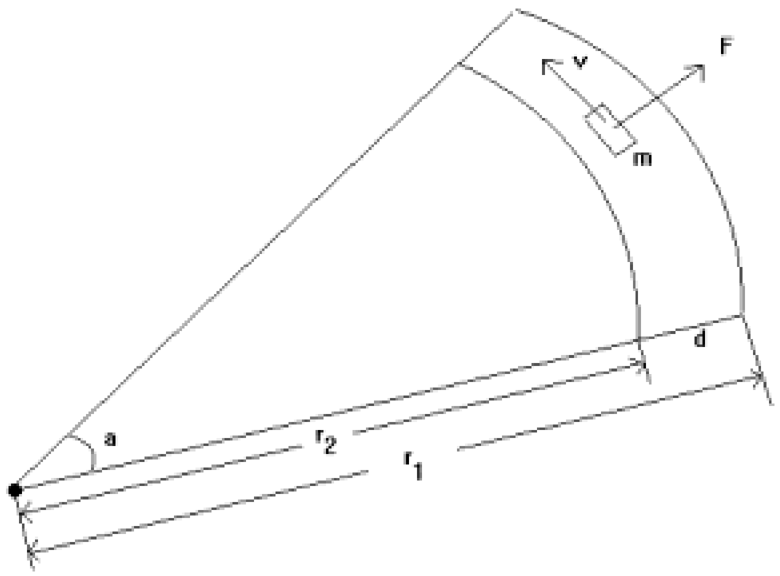
A pozitív f_m-re szereplő kifejezés a feszültség okozta tönkremeneteli esetet fejezi ki, a negatív f_m-re szereplő pedig a hajlítás (görbítés) nyomán kialakuló összenyomás okozta tönkrementeli esetet. A maximális külső terhelés ekkor a következő:

$$Lmax = 1 / \{ \max \ Q_m \}$$

Útszakasz optimális tervezése

Egy kanyar-útszakaszt kell megépíteni minimális költséggel. A kanyar görbületi sugarát, a hosszát (középponti szög), az úttest szélességét természeti adottságok (folyó, épület, stb.), igénybevételi megfontolások (földcsuszamlás, járművek súlya, stb.), valamint szabványi tényezők bizonyos korlátok közé szorítják. Az alábbiakban csupán néhány méreti és erő szempontot veszünk figyelembe.

A feladatot az alábbi ábra szemlélteti.



Az út építésének fajlagos költsége adott, legyen *p* Ft/útegység. Az útegységet megválaszthatjuk m^3-nek. Ekkor a teljes útszakasz *K* építési összköltsége a következő:

$$K = Vp$$

ahol *V* az útszakasz térfogata, amelyet úgy számíthatunk ki, hogy az út *h* magasságát (vastagságát) megszorozzuk az úttest *T* területével:

$$V = Th$$

Ekkor:

$$K = Thp$$

Az úttest *T* területét úgy számíthatjuk ki, hogy a nagyobbik, r1 sugarú körcikk (körszektor) T1 területéből kivonjuk a kisebbik, r2 sugarú körcikk T2 területét. Azaz:

$$T = T1 - T2 = \pi\ aR1^2 / 360° - \pi\ aR2^2 / 360°$$

$$T = \frac{\pi a}{360°} (R1^2 - R2^2)$$

Ilyen módon az összköltség a következő:

$$K = \frac{\pi a}{360°} (R1^2 - R2^2)\ p\ h$$

Az R1 sugarat kifejezhetjük az R2 sugár és az úttest *d* szélességének függvényében:

$$R1 = R2 + d$$

Ekkor az összköltség a következő alakot ölti:

$$K = \frac{\pi a}{360°} (\ (R2^2 + d)^2\ - R2^2)\ p\ h$$

Ebben a kifejezésben adott a *p* egységköltség. A többi paraméter - *a, R2, d* és *h* -- változhat, bizonyos korlátok között. Ezek értékeit kell úgy meghatározni, hogy az összköltség minimális legyen. Ezért ez az összefüggés a célösszefüggés.

Nézzük most a korlátozó feltételeket.

1) Az út *h* vastagságának vannak korlátai, amelyeket technológiai, terhelési vagy más megfontolások alapján határozhatunk meg. Elfogadhatjuk azt, hogy a vastagságnak feltétlenül meg kell haladnia egy bizonyos értéket, tehát:

$$h >= minh$$

2) Az út *d* szélessége is változhat bizonyos korlátok között, amelyeket a terepviszonyok, a forgalmi sávok száma, stb. határoznak meg. Ilyen módon kapjuk az alábbi korlátozó feltételt:

$$mind <= d <= maxd$$

3) Vegyünk figyelembe még egy feltételt, nevezetesen a járművekre ható centripetális erőt. Ennek nagysága - közlekedésbiztonsági okokból - nem haladhat meg egy F0 értéket. A centripetális erő nagysága függ a jármű *m* tömegétől, a *v* sebességétől és az út R1 sugarától. A járművek *m* tömege változó, de most tegyük fel, hogy megelégszünk egy átlagos tömeggel, ami legyen pl. *m*=1 tonna. A sebesség is változó, azonban dolgozhatunk egy átlagsebességgel, pl. v=80 km/h. Ekkor a centripetális erő nagyságát megadó képletben az mv^2 tag konstans lesz, jelöljük ezt *c*-vel. Így következő korlátozó feltételt kapjuk:

$$0 < c / (R2 + d / 2) <= F0$$

ahol R2 + *d / 2* a járművek (kör)pályájának átlagos sugara.

Összefoglalva, a kanyar-útszakasz tervezési feladat matematikai megfogalmazása a következő nemlineáris programozási feladat formáját ölti:

Határozzuk meg a

$$\frac{\pi\, a}{360°} \left((R2^2 + d)^2 - R2^2 \right) p\, h$$

kifejezés minimumát a következő korlátozó feltételek mellett:

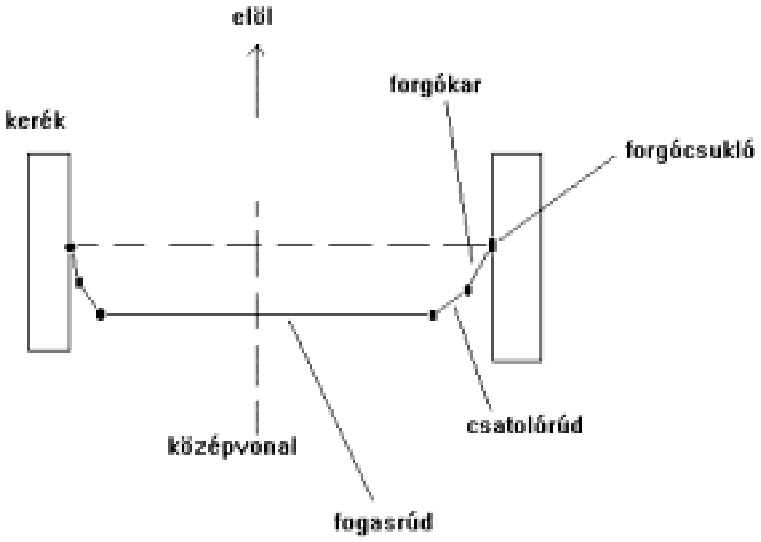
$$h >= minh$$

$$mind <= d <= maxd$$

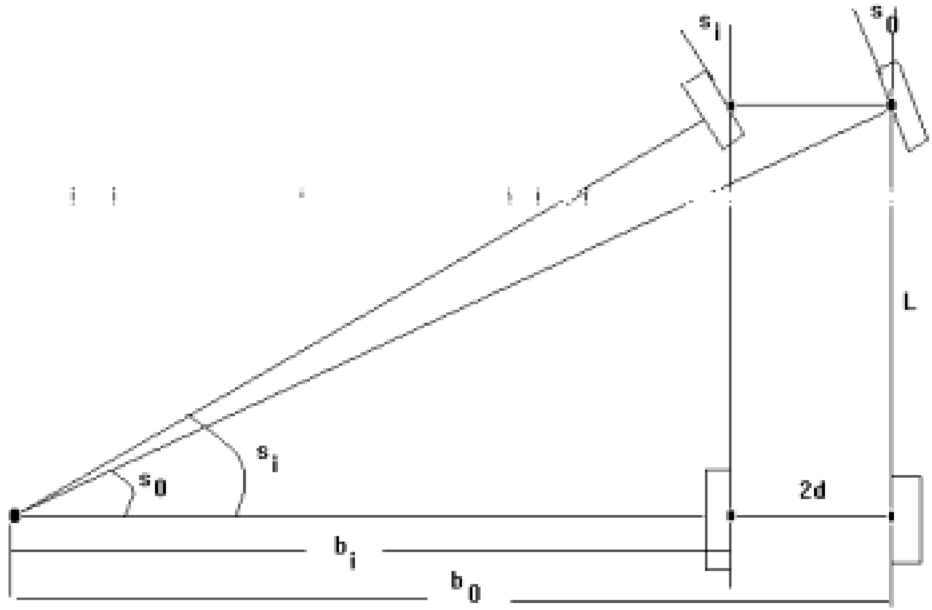
$$0 < c / (R2 + d / 2) <= F0$$

Fogasrúddal kapcsolt meghajtó fogaskerekes kormánykapcsolat tervezése

A szerkezetet az alábbi ábra szemlélteti.



Ilyen szerkezet révén lehet kormányozni járműveket. Ha a kerekek elfordulási szöge azonos, akkor a kerekek által leírt körívek sugara különböző. Mindazonáltal a jármű egyazon középpont körül hajlamos elfordulni. Ezért a kerekekre nemkívánt terhelések hatnak, amit akkor lehet elkerülni, ha a kerekek elfordulási szöge különböző, mégpedig olyan, hogy a forgási középpont azonos legyen. Ez azt jelenti, hogy a belső kerék elfordulási szögének nagyobbnak kell lennie, mint a külsőnek. A gyakorlatban azt lehet elérni, hogy a belső kerék elfordulási szöge az ideálishoz közeli értékhez a lehető legjobban közelítsen.



A külső kerék elfordulási szöge:

$$\tan s0 = L / b0$$

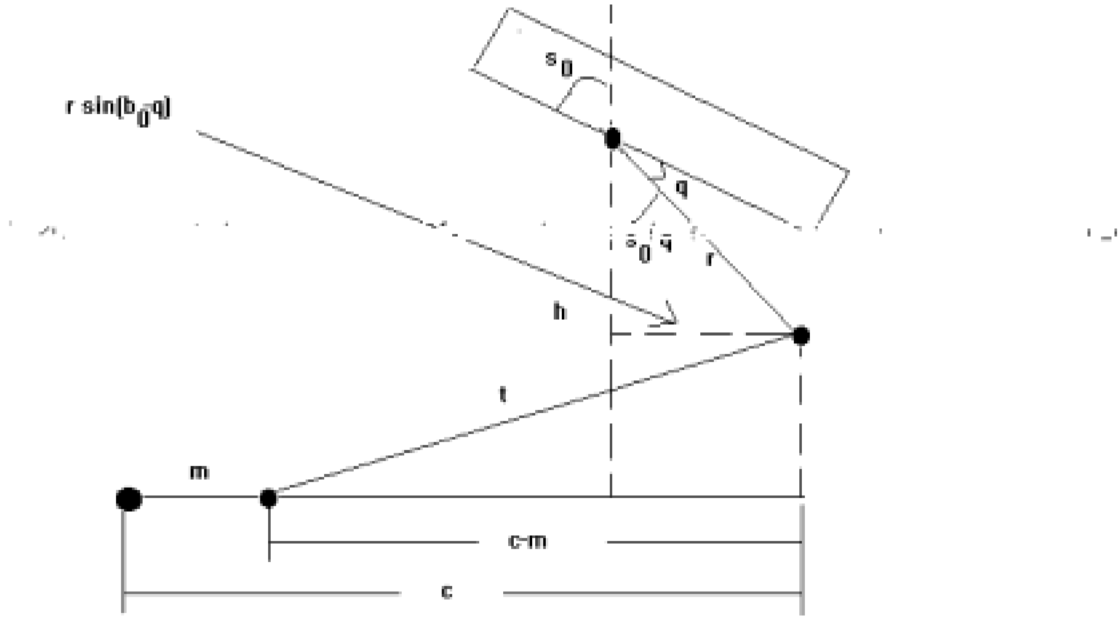
A belső kerék ideális elfordulási szöge:

$$\tan si = L / bi, \ bi = b0 - 2d$$

A fogasrúd távolsága a kerekek tengelyvonalától rögzített, jelöljük *h*-val (pl. 22 cm). A fogasrudat a csatolókarral összekötő csukló *c* (pl. 30 cm) távolságra található a keréktől, egyenes helyzetben. A csatolórúd közvetíti a fogasrúd egyenes vonalú mozgását a kormányrúd forgó mozgásához. A csatolórúd hosszát jelöljük *t*-vel. A kormányrúd hossza *r*, a kerékkel alkotott belső szög nagysága pedig *q*.
A fenti ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$t^2 = (c - r \sin s)^2 + (h - r \cos s)^2$$

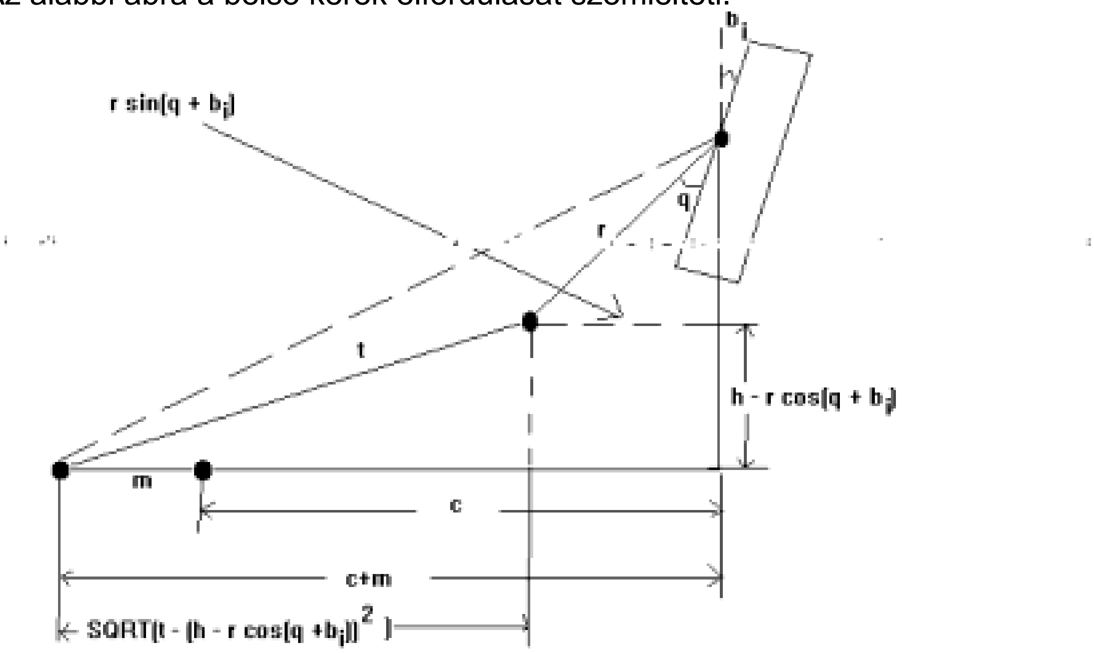
Amikor a fogasrúd elmozdulásának nagysága *m*, akkor kialakulnak a valódi külső si és belső si elfordulási szögek (a forgatás irányától függően).
Az alábbi ábra a külső kerék elfordulását szemlélteti.



A fenti ábra alapján az elmozdulás:

$$m = c + r \sin(s0 - q) - SQRT(\ t^2 - (h - r \cos (b0 - q))^2)$$

Az alábbi ábra a belső kerék elfordulását szemlélteti.



A fenti ábra alapján.

$$c + m = \mathrm{SQRT}\left(t^2 - (h - r \cos(q + bi))^2 \right) + r \sin(q + bi)$$

Az előző kifejezésből *m*-et behelyettesítjük az előbbi kifejezésbe, kiküszöböljük *t*-t, majd abból kifejezzük bi-t.

A cél az, hogy határozzuk meg *r*-et és *q*-t úgy, hogy bi eltérése az ideálistól a lehető legkisebb legyen b0-nak 0-tól 30 fokig terjedő értékeire. Azaz a célfüggvény a követkeyő:

$$1 / 30 \int_{0}^{30} (bi - bi(\text{ideális}))^2 \, d\, b0$$